

STRUCTURE ASYMPTOTIQUE DES ONDES SONORES NON LINÉAIRES ÉMISES PAR UN AVION SUPERSONIQUE ET THEORIE DU BRUIT BALISTIQUE

J. P. GUIRAUD

l'Office National d'Etudes et Recherches
Aérospatiales, Paris

INTRODUCTION

Le but poursuivi dans ce mémoire est avant tout de procéder à une étude critique des méthodes de prévision du bruit d'origine balistique provoqué par le vol des avions supersoniques. Il existe d'excellents exposés synthétiques indiquant, entre autres, la bibliographie de la question pour la quelle nous renvoyons au mémoire de C. H. E. Warren et D. G. Randall;⁹ nous voulons simplement, dans cette introduction, indiquer les grandes lignes de l'évolution du problème et préciser comment s'y insère le présent travail.

Il est connu depuis longtemps que le bruit d'origine balistique associé au seul vol supersonique, est dû au phénomène de focalisation des ondes sonores émises par l'avion le long de sa trajectoire. Selon la théorie purement géométrique de la propagation du son, la focalisation se produit sur les rayons sonores faisant avec la direction locale de vol l'angle $\arccos(1/M_0)$, si M_0 est le nombre de Mach de vol. La figure 1 est très classique, la surface sphéroïdale $\Sigma(\mathbf{P}_0(\tau_0), t)$ donne la position, à l'instant t , de l'onde émise à l'instant τ_0 par l'avion situé en $\mathbf{P}_0(\tau_0)$; lorsque t est fixé et que τ_0 varie, Σ enveloppe une surface conoïdale $B(\mathbf{P}(t))$ ayant son sommet en la position $\mathbf{P}(t)$ de l'avion à l'instant t ; c'est le classique cone de Mach en écoulement stationnaire et c'est au voisinage de cette onde balistique que se produit le bruit. Il est très facile de construire l'onde balistique graphiquement, en utilisant les rayons sonores dont le tracé peut être effectué a priori dès que l'on connaît la célérité du son en chaque point de l'atmosphère calme. Selon le principe de Fermat, les points \mathbf{P}_0 et \mathbf{M} sont sur un même rayon sonore si l'intégrale

$$T(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}) = \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} \quad (1)$$



STRUCTURE ASYMPTOTIQUE DES ONDES SONORES NON LINÉAIRES ÉMISES PAR UN AVION SUPERSONIQUE ET THEORIE DU BRUIT BALISTIQUE

J. P. GUIRAUD

l'Office National d'Etudes et Recherches
Aérospatiales, Paris

INTRODUCTION

Le but poursuivi dans ce mémoire est avant tout de procéder à une étude critique des méthodes de prévision du bruit d'origine balistique provoqué par le vol des avions supersoniques. Il existe d'excellents exposés synthétiques indiquant, entre autres, la bibliographie de la question pour la quelle nous renvoyons au mémoire de C. H. E. Warren et D. G. Randall;⁹ nous voulons simplement, dans cette introduction, indiquer les grandes lignes de l'évolution du problème et préciser comment s'y insère le présent travail.

Il est connu depuis longtemps que le bruit d'origine balistique associé au seul vol supersonique, est dû au phénomène de focalisation des ondes sonores émises par l'avion le long de sa trajectoire. Selon la théorie purement géométrique de la propagation du son, la focalisation se produit sur les rayons sonores faisant avec la direction locale de vol l'angle $\text{Arccos}(1/M_0)$, si M_0 est le nombre de Mach de vol. La figure 1 est très classique, la surface sphéroïdale $\Sigma(\mathbf{P}_0(\tau_0), t)$ donne la position, à l'instant t , de l'onde émise à l'instant τ_0 par l'avion situé en $\mathbf{P}_0(\tau_0)$; lorsque t est fixé et que τ_0 varie, Σ enveloppe une surface conoïdale $B(\mathbf{P}(t))$ ayant son sommet en la position $\mathbf{P}(t)$ de l'avion à l'instant t ; c'est le classique cone de Mach en écoulement stationnaire et c'est au voisinage de cette onde balistique que se produit le bruit. Il est très facile de construire l'onde balistique graphiquement, en utilisant les rayons sonores dont le tracé peut être effectué a priori dès que l'on connaît la célérité du son en chaque point de l'atmosphère calme. Selon le principe de Fermat, les points \mathbf{P}_0 et \mathbf{M} sont sur un même rayon sonore si l'intégrale

$$T(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}) = \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} \quad (1)$$

est stationnaire, pour toute modification du rayon à extrémités fixées, et l'onde partie de \mathbf{P}_0 à l'instant τ_0 arrive en \mathbf{M} à l'instant $\tau_0 + T$. Le point \mathbf{M} est sur l'onde balistique si la direction initiale du rayon de propagation en \mathbf{P}_0 fait l'angle $\text{Arccos}(I/M_0)$ avec la direction locale de vol. On dit aussi que le point \mathbf{M} est en onde stationnaire avec l'émetteur sonore en mouvement $\mathbf{P}(t)$, à l'instant τ_0 . La condition pour qu'il en soit ainsi est que l'expression $T(\mathbf{P}_0(\tau_0), \mathbf{M}) + \tau_0$ soit stationnaire en τ_0 , mais, comme l'on a

$$\frac{\partial T}{\partial \tau_0} = -\theta, V_0 a_0^{-1} \quad (2)$$

où \mathbf{V}_0 est le vecteur vitesse de vol et θ le vecteur unitaire tangent au rayon sonore en \mathbf{P}_0 , la propriété précédente est ainsi très simplement établie.

Cette théorie est très suffisante lorsqu'il s'agit uniquement de localiser la zone de bruit et les expériences effectuées en vol de ce point de vue permettent de la confirmer; en revanche, elle échoue complètement lorsqu'il s'agit de déterminer le niveau de bruit, ainsi qu'il apparaît sur la figure 2 qui représente, pour un cas typique, en (a) la surpression relative prévue au sol par la théorie acoustique en un point donné, comme fonction du temps, et en (b) la même surpression mesurée expérimentalement. On a indiqué en OB_t et OB_q les instants de passage des ondes balistiques émises par le nez et par la queue de l'avion, dites respectivement onde de tête et onde de queue.

La théorie acoustique a été réconciliée avec l'expérience par G. B. Whitham¹⁰ grâce à une très légère modification de la théorie. Cet auteur a montré que le désaccord était dû au caractère non linéaire de la propagation du son, dont la théorie acoustique ne tient pas compte. Ainsi les ondes sonores sont-elles déformées et leur intensité est-elle modifiée par les termes non linéaires qui interviennent dans les équations du mouvement, mais Whitham a montré que, ce qui est

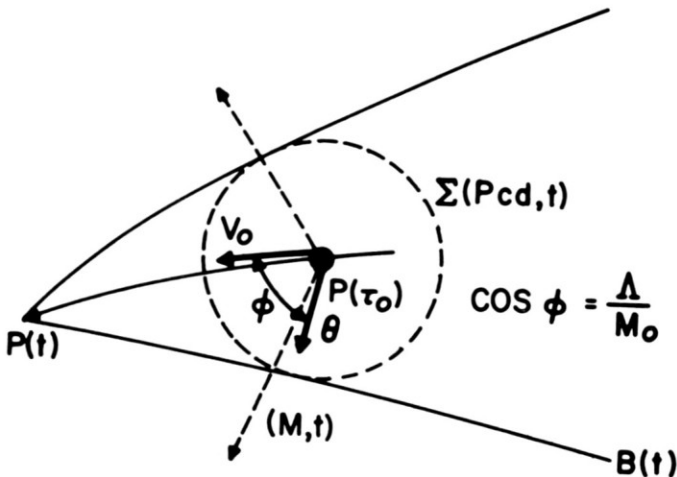


Fig. 1. Onde et onde balistique.

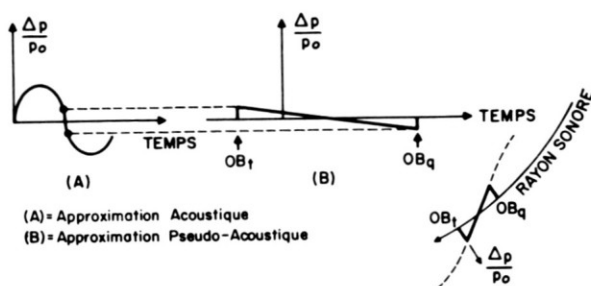


Fig. 2. (a) Approximation acoustique; (b) approximation pseudo-acoustique.

important, c'est la déformation des ondes et non la modification de leur amplitude. Physiquement la description est claire: les divers points de l'avion peuvent être considérés comme des émetteurs sonores en mouvement, chacun émettant son propre système d'ondes indépendamment des autres, la superposition de tous ces systèmes constituant le phénomène global; du moins telle est la description acoustique. En réalité les systèmes d'ondes interfèrent entre eux par l'effet de la non linéarité, mais cette interférence est sans effet notable sur l'amplitude du phénomène résultant; ce qui compte c'est que les ondes se propagent, non pas dans l'atmosphère calme, mais dans l'atmosphère perturbée par le phénomène résultant. De façon précise, chaque système d'ondes se propage avec la célérité du son réelle relativement au fluide en mouvement, mais il conserve son individualité; en outre, continuellement, il y a des systèmes d'ondes qui sont absorbés par des ondes de choc et dissipés dans l'intérieur de ces dernières sans être renvoyés de façon appréciable vers le fluide.

En écoulement monodimensionnel non stationnaire cette description physique est facile à traduire mathématiquement, mais il n'en est plus de même à deux ou à trois dimensions, parce que les ondes voyagent dans toutes les directions. Effectivement la théorie du phénomène a été élaborée il y a longtemps par K. O. Friedrichs¹ en écoulement monodimensionnel non stationnaire et elle a été reprise ensuite, dans les mêmes conditions, par Lighthill^{7b} qui a discuté et justifié la technique de Friedrichs en procédant à une analyse fine des termes négligés. En écoulement de révolution stationnaire, en atmosphère homogène, la technique a été découverte par Whitham^{10b} grâce à une analyse a priori du comportement asymptotique à l'infini d'un écoulement supersonique stationnaire. Whitham^{10a} a découvert que, si ce comportement était écrit à l'aide de deux variables, dont l'une est la distance à l'axe de symétrie alors que l'autre reste constante sur les lignes de Mach, il devenait identique au comportement asymptotique correspondant prévu par la théorie acoustique. De là la règle: si l'on connaît l'écoulement supersonique stationnaire produit par un écoulement de révolution, son comportement à l'infini dans la zone de bruit donne le niveau réel de pression, à condition de l'appliquer, pour chaque valeur de la distance à l'axe, sur la ligne de Mach déformée et non sur la ligne de Mach rectiligne de l'écoulement non perturbé. Dans un second article Whitham^{10b} a montré tout le parti que l'on pouvait tirer de sa règle.

Les écoulements tridimensionnels non stationnaires sont plus difficiles à traiter et Whitham^{10c} s'est contenté d'une analyse physique de la situation, en assimilant l'écoulement, le long de chaque rayon de propagation, à un écoulement monodimensionnel non stationnaire dans un tube de section variable: la théorie acoustique prédit correctement le niveau de pression dans le tube mais celui-ci se déforme sous l'effet des perturbations qu'il véhicule. Cette règle a été appliquée par P. S. Rao⁸ qui a ainsi pu inclure les effets de portance dans la prévision du bruit. Il restait à inclure les effets de non homogénéité dans la description. Les ingénieurs y parviennent en remplaçant la pression atmosphérique, là où elle intervient, par la moyenne géométrique des pressions à l'altitude de vol et au sol où l'on observe le bruit. Une attitude plus scientifique consiste à utiliser l'analogie de l'écoulement dans un tube, en écrivant que l'intensité de la perturbation de pression dans le tube évolue d'une manière telle que se conserve le flux d'énergie acoustique, évalué dans l'hypothèse d'onde plane. Dans quelle mesure ces schémas sont-ils valables, voilà qui est difficile à dire tant que l'on ne possède pas de théorie mathématique du phénomène; c'est une telle théorie que nous nous proposons de présenter dans ce mémoire, et il apparaît que les schémas en question sont essentiellement corrects, dans le cas du vol dans l'atmosphère terrestre, mais les détails en seront précisés sans ambiguïté.

LA THEORIE ACOUSTIQUE

Il est possible de montrer que, si l'atmosphère terrestre, initialement au repos et rapportée à des axes $Oxyz$, également au repos, avec Oz vertical ascendant, est perturbée, la perturbation de pression $\bar{p} = p - p_0$ (l'indice zéro est relatif à l'atmosphère non perturbée) vérifie une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} + 2\mathbf{U} \cdot \nabla \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + (\mathbf{U}\mathbf{U} - a^2\mathbf{I}) : \nabla \nabla \bar{p} - \left(\frac{p}{\rho} \frac{\nabla S}{c_v} + g\mathbf{k} \right) \cdot \nabla \bar{p} = \square \quad (3)$$

avec (tr veut dire transposé)

$$\begin{aligned} \square = & \rho a^2 (\nabla \mathbf{U}) : (\nabla \mathbf{U})^{\text{transposé}} + p^{-1} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \bar{p} \right)^2 \\ & + (a^2 - a_0^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})^2) \frac{d^2 p_0}{dz^2} + \left(\frac{p}{\rho} \frac{\nabla S}{c_v} - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{dS_0}{c_v dz} \right) \cdot \mathbf{k} \frac{dp_0}{dz} \end{aligned} \quad (4)$$

Le vecteur \mathbf{U} désigne le vecteur vitesse du fluide (il est donc nul pour l'atmosphère non perturbée), a désigne la célérité du son, S désigne l'entropie spécifique, \mathbf{I} est le tenseur unité, ∇ est l'opérateur gradient, \mathbf{k} est le vecteur unité de Oz , g est l'intensité de l'accélération de la pesanteur.

L'équation (3) doit être assortie du système

$$\left. \begin{aligned} \frac{DU}{Dt} + \frac{\nabla \bar{p} + \bar{\rho} g \mathbf{k}}{\rho_0 + \bar{\rho}} = 0, \\ \frac{DS}{Dt} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ désigne l'opération de dérivation particulière, et, naturellement, $\rho = \rho_0 + \bar{\rho}$.

Les équations (3) et (5) forment le point de départ de l'étude; la première est considérée comme une équation linéaire en \bar{p} :

$$\mathcal{L}(\bar{p}) = \square \quad (6)$$

le second membre \square et les coefficients de l'opérateur \mathcal{L} étant inconnus; ensuite, (5) est un système différentiel assurant, en principe, la détermination de \mathbf{U} , S et ρ .

Lorsque \bar{p} est très petit, les équations (3) et (5) peuvent être linéarisées, conformément au schéma de l'approximation dite acoustique, selon laquelle \bar{p} vérifie l'équation (γ est le rapport des chaleurs spécifiques):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \bar{p} - \left(\gamma g + \frac{da_0^2}{dz} \right) \frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{p_0}{\rho_0 c_v} \frac{\partial(S - S_0)}{\partial z} \frac{dp_0}{dz} \\ + 2a_0 \bar{a} \left\{ \frac{d^2 p_0}{dz^2} + \frac{1}{\gamma c_v} \frac{dS_0}{dz} \frac{dp_0}{dz} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

alors que \mathbf{U} et S se déduisent de \bar{p} par les formules suivantes,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= -\rho_0^{-1} \nabla \int_{-\infty}^t \bar{p}(x, y, z, t') dt', \\ \frac{S - S_0}{c_v} &= \gamma \rho_0^{-1} \left\{ (\gamma - 1) g a_0^{-2} + a_0^{-2} \frac{da_0^2}{dz} \right\} \frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad \int_{-\infty}^t (t - t') \bar{p}(x, y, z, t') dt' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Si les perturbations étudiées sont créées par le vol d'un avion, une technique classique permet de montrer que la prise en compte de celui-ci est automatique si (7) est remplacée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \bar{p} - \left(\gamma g + \frac{da_0^2}{dz} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \rho_0 a_0^2 \mathcal{J} + \frac{p_0}{\rho_0 c_v} \frac{\partial S - S_0}{dz} \frac{dp_0}{dz_1} \\ + 2a_0 \bar{a} \left\{ \frac{d^2 p_0}{dz^2} + \frac{1}{\gamma c_v} \frac{dS_0}{dz} \frac{dp_0}{dz} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

où \mathfrak{J} désigne une distribution (au sens de L. Schwartz⁵) portée par le squelette de l'avion: axe du fuselage et forme en plan de l'aile. La forme précise de \mathfrak{J} , qui peut être atteinte grâce à la théorie linéaire, n'est pas explicitée pour le moment.

MODIFICATION DE LA THEORIE ACOUSTIQUE

Il est connu que la théorie acoustique n'est pas valable uniformément au loin, et que la zone de bruit balistique est précisément une zone de non uniformité, où la théorie acoustique doit être modifiée selon la règle énoncée par Whitham: les valeurs de \bar{p} sont correctement prédites par la théorie linéaire mais elles voyagent avec la célérité du son perturbée relativement à l'atmosphère elle-même en mouvement, ce qui veut dire que des effets non linéaires doivent être pris en compte dans la description du phénomène de propagation par ondes, mais qu'ils peuvent être calculés, suivant une technique à élaborer, en utilisant la solution acoustique. D'ailleurs, les phénomènes non linéaires incriminés interviennent uniquement par leur accumulation à grande distance, de sorte que l'approximation acoustique est valable au voisinage immédiat de l'avion. Il est donc légitime d'adopter l'attitude suivante: le phénomène de propagation des perturbations de pression est régi par l'équation linéaire

$$\mathcal{L}(\bar{p}) = \rho_0 a_0^2 \mathfrak{J} + \square, \quad (10)$$

les coefficients de l'opérateur \mathcal{L} , ainsi que \square étant inconnus; cela signifie que l'émission du son par l'avion est convenablement décrite par la théorie acoustique, mais que la propagation au loin nécessite la considération de l'équation exacte (10). Il faut supposer également que les ondes sonores s'éloignent de l'avion sans subir de réflexion sur les ondes de choc; la validité de cette dernière hypothèse paraît acquise à la suite de l'analyse très fine effectuée par Lighthill^{7b} dans le cas des écoulements monodimensionnels non stationnaires.

La clef de l'étude consiste en l'utilisation des techniques de résolution des équations linéaires hyperboliques à coefficients variables pour représenter la solution de (10) en termes des coefficients de \mathcal{L} et de \square . Sur une telle représentation formelle de la solution, on examine son comportement à l'infini dans la zone de bruit et l'on met en évidence un système de variables intrinsèques pour les ondes sonores qui la composent. Il sera ainsi établi que, vu de l'infini et dans la zone de bruit, l'avion peut être réduit à un ensemble d'émetteurs sonores répartis sur l'axe du fuselage. Ce sont les ondes envoyées par ces émetteurs qui sont décrites grâce à un système de quatre variables $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$ dont la signification est la suivante (voir fig. 3): l'instant d'émission est τ_0 , la position de l'émetteur sur l'axe du fuselage est précisée par la variable θ_0 qui est la distance au nez, θ est une variable qui précise la direction d'émission, enfin λ est une variable qui est directement liée au temps écoulé depuis l'instant d'émission. En ce qui concerne θ , il faut remarquer que, si le son est initialement émis dans toutes les directions, il ne conduit à des effets cumulatifs que pour des directions initiales privilégiées faisant avec la direction de vol l'angle $\text{Arccos}(1/M_0)$ où M_0 est le

nombre de Mach de vol V_0/a_0 ; les directions en question sont donc réparties, pour chaque τ_0 et chaque ξ_0 , sur un cône de révolution et θ précise la direction choisie sur un tel cône. La perturbation de pression \bar{p} , ainsi que sa localisation dans la zone de bruit, sont alors exprimées en fonction des variables $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$. La localisation dans la zone de bruit est décrite en termes d'évènements, un évènement, étant la considération simultanée d'un point \mathbf{M} de l'espace et d'un instant t , est représenté symboliquement par la même lettre que celle correspondant à la lettre romaine qui désigne sa projection d'espace; ainsi $\mathbf{M} \Leftrightarrow (\mathbf{M}, t_{\mathbf{M}})$. Conformément au schéma précédemment décrit, la zone de bruit est représentée par le système de formules

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

L'élimination de $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$ entre les équations (11), qui sont au nombre de cinq, permet en principe d'exprimer \bar{p} comme fonction de \mathbf{M} . Les formules (11) contiennent des effets non linéaires puisqu'elles sont déduites de la représentation de la solution de (10), et, comme telles, elles ne sont pas explicites; toutefois, il est possible d'obtenir des formules explicites en effectuant un développement formel suivant les puissances du petit paramètre ϵ caractérisant l'amplitude des petites perturbations en théorie acoustique. De façon précise, un tel développement formel se présentera comme suit

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0, \epsilon) &= \epsilon \bar{p}_1(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) + \epsilon^2 \bar{p}_2(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) + \dots, \\ \mathbf{M}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0, \epsilon) &= \mathbf{M}_0(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) + \epsilon \mathbf{M}_1(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

de sorte que le procédé utilisé s'apparente de très près à la technique de Lighthill^{7a} destinée à rendre uniformément valable une approximation qui ne l'est pas sans modification.

Il est clair que l'approximation acoustique est obtenue, comme représentation de \bar{p} en fonction de \mathbf{M} , par élimination de $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$ entre les cinq équations

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= \epsilon \bar{p}_1(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

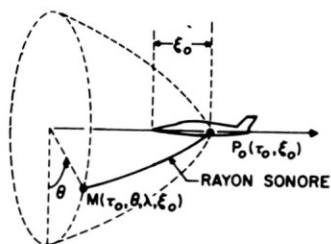


Fig. 3. Définition des variables $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$.

alors que la règle de Whitham consiste à retenir

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) + \epsilon \mathbf{M}_1(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) = \mathbf{M}_0 + \bar{\mathbf{M}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ce qui conduit, après élimination de $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$, à une représentation de \bar{p} en fonction de \mathbf{M} qui peut être appelée pseudo-acoustique. La théorie présentement développée ne donne donc pas de résultat essentiellement nouveau relativement à la règle de Whitham, encore qu'elle indique de façon très précise et sans ambiguïté possible comment il faut appliquer cette règle, mais elle la justifie en ce sens qu'il devient possible de prouver que l'on a

$$|\epsilon \bar{p}_2| \ll |\bar{p}_1|, \quad |\epsilon \mathbf{M}_1| \ll |\mathbf{M}_0| \quad (15)$$

Si la relation (13) est inversée de manière à exprimer $\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0$ à l'aide ces coordonnées spatio-temporelles naturelles de \mathbf{M}_0 , l'on peut écrire, à la place de (14), les formules suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}^{(PsAc)}(\mathbf{M}) &= \bar{p}^{(Ac)}(\mathbf{M}_0) \\ \mathbf{M}_0 &= \mathbf{M}_0 + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{M}_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Soit $\nabla^{(4)}$ l'opérateur gradient dans l'espace temps à quatre dimensions des événements \mathbf{M} ; pourvu que soit vérifiée la condition

$$|\bar{\mathbf{M}} \cdot \nabla_{\mathbf{M}}^{(4)} \bar{p}^{(Ac)}| \ll \bar{p}^{(Ac)} \quad (17)$$

l'on peut remplacer (16) par

$$\bar{p}^{(PsAc)}(\mathbf{M}) = \bar{p}^{(Ac)}(\mathbf{M}) - \bar{\mathbf{M}} \cdot \nabla_{\mathbf{M}}^{(4)} \bar{p}^{(Ac)}(\mathbf{M}) + \dots \quad (18)$$

de sorte que l'approximation pseudo-acoustique ne diffère que par un terme très faible de l'approximation acoustique; telle est la situation en général, en revanche, dans la zone de bruit, la condition (17) n'est pas vérifiée et l'approximation pseudo-acoustique, qui fournit une bonne représentation de la réalité, diffère considérablement de l'approximation acoustique. En réalité, l'analyse montre que, dans la zone de bruit, l'on a plutôt

$$O(|\bar{\mathbf{M}} \cdot \nabla_{\mathbf{M}}^{(4)} \bar{p}^{(PsAc)}|) = O(|\bar{p}^{(Ac)}|) \quad (19)$$

LE ROLE DE LA FONCTION D'INFLUENCE ET SA CONSTRUCTION

DESCRIPTION DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE OU FONCTION D'INFLUENCE

Il s'agit maintenant de voir, de façon précise, comment l'on peut aboutir aux formules (16). Pour cela nous revenons à l'équation (10) et utilisons sa solution élémentaire $\varepsilon(\mathbf{P}; \mathbf{M})$ définie par la condition

$$\mathcal{L}_M \{ \varepsilon(\mathbf{P}; \mathbf{M}) \} = \delta(\mathbf{M} - \mathbf{P}) \quad (20)$$

où $\delta(\mathbf{M}-\mathbf{P})$ désigne la masse de Dirac unité, considérée comme distribution en \mathbf{M} , placée en l'évènement \mathbf{P} . On peut dire que la solution élémentaire représente l'influence, en l'évènement \mathbf{M} , d'un émetteur sonore, de type à préciser, agissant en l'évènement \mathbf{P} ; voilà pourquoi nous désignons aussi la solution élémentaire sous le nom de fonction d'influence, bien que ce ne soit pas une fonction au sens propre du terme. Grâce à cette fonction d'influence, et grâce à l'hypothèse de non réflexion des ondes, qui est en quelque sorte une hypothèse de rayonnement vers l'infini, l'équation (10) est équivalente à

$$\bar{p}(\mathbf{M}) = \{ (\rho_0(\mathbf{P}) a_0^2(\mathbf{B}) \mathfrak{J}(\mathbf{P}) + \square(\mathbf{L}) \}^* \varepsilon(\mathbf{P}; \mathbf{M}), \quad (21)$$

le signe * désignant l'opération d'intégration sur la variable \mathbf{P} au sens de la théorie des distributions.

Avant d'examiner le comportement de la précédente formule à l'infini dans la zone de bruit, nous devons expliciter la fonction d'influence. Cela est très facile grâce aux travaux de J. Hadamard,³ M. Riesz,⁴ L. Schwartz,⁵ qui permettent de procéder heuristiquement et fournissent une justification mathématique a posteriori de notre procédé de construction. Le point de départ est constitué par l'équation des ondes avec célérité du son constante:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \bar{p} = f, \quad (22)$$

dont la solution élémentaire se déduit de la formule bien connue des potentiels retardés

$$\bar{p}(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \iiint \frac{f\left(\mathbf{P}, t_M - \frac{|\mathbf{PM}|}{a_0}\right)}{|\mathbf{PM}|} d\mathbf{P} \quad (23)$$

laquelle montre que

$$\varepsilon_{\text{ondes}}(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \frac{\delta\left(t_r - t_M + \frac{|\mathbf{PM}|}{a_0}\right)}{4\pi a_0^2 |\mathbf{PM}|} \quad (24)$$

où δ est la masse de Dirac unité relativement à la variable t_r , placée en l'instant $t_m - |\mathbf{PM}|/a_0$. La généralisation de (24) au cas de l'équation à coefficients variables fait usage de la fonction

$$\Gamma_{\text{ondes}}(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = (t_m - t_r)^2 - a_0^{-2} |\mathbf{PM}|^2 \quad (25)$$

dont l'annulation caractérise le fait que les événements \mathbf{P} et \mathbf{M} sont sur une même onde sonore, ce que l'on traduit en disant que ces deux événements sont en onde. En raison de la formule de changement de variables $d\mathbf{P}dt_r = d\mathbf{P}d\Gamma/\Gamma_{t_r}$ l'on voit que (14) peut encore s'écrire

$$\varepsilon_{\text{ondes}}(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \frac{\delta(\Gamma)}{2\pi a_0^3} \quad (26)$$

et il est très facile, à partir de là, de décrire $\varepsilon(\mathbf{P}; \mathbf{M})$ pour l'opérateur \mathcal{L} . A cet effet il est posé $x = x^1, y = x^2, z = x^3, t = x^4$ de sorte que les x^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) fournissent un système de coordonnées naturelles pour les événements \mathbf{M} . L'opérateur \mathcal{L} s'écrit, avec la convention des indices muets,

$$\mathcal{L} \equiv G^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \left(\frac{p}{\rho} \frac{\nabla S}{c_v} + g\mathbf{k} \right) \cdot \nabla \quad (27)$$

la matrice des $G^{\alpha\beta}$ ayant pour réciproque celle des $G_{\alpha\beta}$, et l'on a :

$$(G^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{UU} - a^2\mathbf{I} & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} & 1 \end{pmatrix}; \quad (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -a^{-2}\mathbf{I} & a^{-2}\mathbf{U} \\ a^{-2}\mathbf{U} & 1 - \frac{U^2}{a^2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

si \mathbf{I} désigne le tenseur unité dans l'espace des x^i ($i = 1, 2, 3$). Il est clair que si l'on pose

$$\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \left(\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \{ | G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta | \}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (29)$$

la fonction ainsi définie se réduit, pour l'équation des ondes avec célérité du son constante, à celle introduite en (25), pourvu que l'intégration soit effectuée le long de la "droite" joignant les événements \mathbf{P} et \mathbf{M} . Pour l'opérateur des ondes avec célérité du son constante, les $G_{\alpha\beta}$ sont constants et la "droite" en question est géodésique de la métrique

$$ds^2 = G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (30)$$

il est donc naturel, lorsque les $G_{\alpha\beta}$ sont variables, d'évaluer l'intégrale (29) le long des géodésiques de la métrique (30) qui joint \mathbf{P} à \mathbf{M} . En approximation acoustique l'on néglige \mathbf{U} et l'on remplace a par la célérité du son a_0 de l'atmosphère non perturbée, (29) devenant alors

$$\Gamma^{(A_0)}(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = (t_m - t_r)^2 - \left(\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0} \right)^2 \quad (31)$$

Dans ce cas la géodésique est entièrement définie par sa projection d'espace, ou rayon sonore, et par la loi horaire de son parcours. Le rayon de propagation réalise l'extremum, à extrémités fixées, de l'intégrale

$$T(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0} \tag{32}$$

qui n'est autre que le temps de parcours pour aller de \mathbf{P} en \mathbf{M} en voyageant avec une onde. Tel est le principe de Fermat de l'acoustique géométrique, ainsi que nous l'avons déjà appelé dans l'introduction.

Lorsque l'on remarque que le déterminant G des $G_{\alpha\beta}$ est égal à a^{-6} , l'on voit que $\varepsilon_{\text{ondes}}$ peut encore se mettre sous la forme $(2\pi)^{-1}G^{1/2}\delta(\Gamma)$, de sorte que l'expression

$$\varepsilon(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \frac{\sqrt{G(\mathbf{P})} \{ \phi_0(\mathbf{P}; \mathbf{M}) \delta[\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M})] + H(\mathbf{P}; \mathbf{M}) 1[\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M})] \}}{2\Gamma} \tag{33}$$

où $1(\Gamma) = 1$ si $\Gamma > 0$ et $1(\Gamma) = 0$ si $\Gamma < 0$, est une généralisation naturelle de $\varepsilon_{\text{ondes}}$ à laquelle elle se réduit si $\phi_0 \equiv 1$ et si $H \equiv 0$; telle est, selon M. Riesz, et avec les notations de L. Schwartz, la valeur de la solution élémentaire. Il existe une formule, due à Hadamard pour effectuer le calcul de ϕ_0 , alors que H , selon M. Riesz, dépend de la solution d'une équation intégrale du type héréditaire. Les deux termes de (33) s'interprètent respectivement comme un potentiel retardé voyageant le long des géodésiques de longueur nulle ($\Gamma = 0$) de la métrique (30), dont l'amplitude varie le long de ces géodésiques selon de facteur ϕ_0 , et comme un résidu voyageant en retrait, ou, comme l'on dit, sous-onde. De façon plus imagée, si l'on considère une perturbation créée à l'instant initial au point \mathbf{P} , elle se retrouve ultérieurement distribuée en deux parts: l'une d'elles est concentrée sur la surface d'onde émise par \mathbf{P} et peut être considérée comme ayant voyagé, avec l'onde, le long des rayons de propagation, projections d'espace des géodésiques mentionnées plus haut; l'autre part consiste en un résidu continuellement distribué en retrait de la surface d'onde. Le lieu des positions successives de la surface d'onde, considéré dans l'espace temps des évènements, n'est autre que la surface $\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = 0$. Consulter la figure 4.

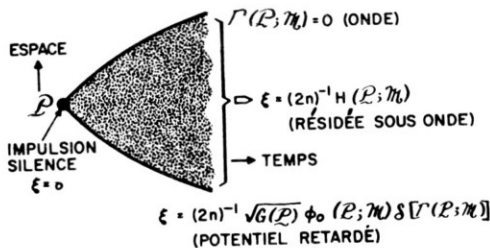


Fig. 4. Structure de la solution élémentaire.

VERIFICATION DE L'EXPRESSION OBTENUE POUR LA FONCTION D'INFLUENCE

Nous allons maintenant vérifier que, moyennant un choix convenable de ϕ_0 et H , l'équation de définition de la solution élémentaire (20) est bien vérifiée avec (33). Il est commode d'introduire des notations vectorielles intrinsèques dans l'espace temps des événements en notant

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{G} G^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x^\beta} \right) &= \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla \end{smallmatrix} \right) \right) (\bar{p}) \\ G^{\alpha\beta} \mathfrak{U}_\alpha \frac{\partial \bar{p}}{\partial x^\beta} &= \mathfrak{U}^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \mathfrak{U} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla \bar{p} \end{smallmatrix} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

de sorte que l'opérateur \mathcal{L} peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}(\bar{p}) \equiv \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla \end{smallmatrix} \right) \right) (\bar{p}) + \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \mathfrak{U} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla \bar{p} \end{smallmatrix} \right) \right) \equiv \mathcal{L}_1(\bar{p}) + \mathcal{L}_2(\bar{p}) \quad (35)$$

grâce à un choix convenable des \mathfrak{U}^α , c'est à dire:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}^\alpha &= \mathfrak{U}_{\textcircled{1}}^\alpha + \mathfrak{U}_{\textcircled{2}}^\alpha \\ \mathfrak{U}_{\textcircled{1}}^\alpha &= - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{G} G^{\alpha\beta}) \\ \mathfrak{U}_{\textcircled{2}}^i &= - \frac{p}{\rho c_v} \frac{\partial S}{\partial x^i} \quad (i = 1, i = 2), \\ &\mathfrak{U}_{\textcircled{2}}^3 = - \frac{p}{\rho c_v} \frac{\partial S}{\partial x^3} - g, \quad \mathfrak{U}_{\textcircled{2}}^4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Avec un tel système de notations il est assez facile de vérifier que la substitution de (33) dans (20) donne une identité, pourvu que soient vérifiées certaines conditions qui permettront de déterminer ϕ_0 et H . On commence par un calcul formel, qui est immédiat si l'on n'en cherche pas la justification et qui peut d'ailleurs être justifié a posteriori par comparaison avec les résultats généraux de M. Riesz, ou même directement grâce aux techniques de L. Schwartz; cela conduit à la formule

$$\begin{aligned} 2\pi G^{-1/2}(\mathbf{P}) \mathcal{L}_M[\mathcal{E}(\mathbf{P}; \mathbf{M})] &= \phi_0 \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix} \right) \right) \delta''(\Gamma) \\ + \left\{ H \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix} \right) \right) + 2 \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \phi_0 \end{smallmatrix} \right) \right) + \phi_0 \left[\left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \end{smallmatrix} \right) \right) (\Gamma) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \mathfrak{U} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix} \right) \right) \right] \right\} \delta'(\Gamma) + \left\{ 2 \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M H \end{smallmatrix} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + H \left[\left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \end{smallmatrix} \right) \right) (\Gamma) + \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \mathfrak{U} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla_M \Gamma \end{smallmatrix} \right) \right) \right] + \mathcal{L}_M(\phi_0) \right\} \delta(\Gamma) \\ &\quad + \mathcal{L}_M(H) 1(\Gamma) \end{aligned} \quad (37)$$

et il faut évaluer les expressions

$$\left(\left(\overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}}, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \right) \right) (\Gamma), \left(\left(\overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma \right) \right), \left(\left(\overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \phi_0 \right) \right) \text{ et } \left(\left(\mathcal{U}, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma \right) \right)$$

Pour y parvenir il est très commode de faire usage d'une analogie mécanique. Imaginons que la géodésique joignant \mathbf{P} à \mathbf{M} soit parcourue par un mobile suivant la loi horaire $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$, la force vive étant

$$\frac{1}{2} G(\dot{x}) = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (38)$$

le fait que la trajectoire quadridimensionnelle du mobile est une géodésique de la métrique associée à sa force vive implique que cette trajectoire est parcourue par inertie, sans intervention de forces, selon les équations du mouvement suivantes

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial G}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (39)$$

et il est connu que la force vive doit rester constante au cours du mouvement, soit, le long de la géodésique,

$$G(\dot{x}) = E = c_{\text{OUST}} \quad (40)$$

Selon la définition (29), Γ est égal au carré de l'intégrale d'action

$$\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = A^2(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \left(\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} G^{1/2}(\dot{x}) d\lambda \right)^2 = \lambda_{\mathbf{PM}}^2 G(\dot{x}) \quad (41)$$

or il est connu, en théorie de Hamilton-Jacobi, que $\partial A / \partial x^\alpha = \partial G^{1/2} / \partial x^\alpha$, de sorte que l'on a :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} = \lambda_{\mathbf{PM}} \frac{\partial G}{\partial x^\alpha} = 2 \lambda_{\mathbf{PM}} \left(G_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)_{\mathbf{M}} \quad (42)$$

De là résultent immédiatement les formules cherchées

$$\left. \begin{aligned} \left(\left(\overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma \right) \right) &= 4\Gamma \\ \left(\left(\overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}}, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \right) \right) (\Gamma) &= 2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda_{\mathbf{PM}} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right)_{\mathbf{M}} \right) \\ &\quad + 2 \lambda_{\mathbf{PM}} \frac{d}{d\lambda} (\log \sqrt{G}) \\ \left(\left(\overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \phi_0 \right) \right) &= 2 \lambda_{\mathbf{PM}} \left(\frac{d\phi_0}{d\lambda} \right)_{\mathbf{M}} \\ \left(\left(\mathcal{U}, \overset{(4)}{\nabla}_{\mathbf{M}} \Gamma \right) \right) &= 2 \lambda_{\mathbf{PM}} G_{\alpha\beta}{}^\alpha(\mathbf{M}) \mathcal{U}^\alpha(\mathbf{M}) \left(\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)_{\mathbf{M}} \\ &= 2 \lambda_{\mathbf{PM}} \left(\left(\mathcal{U}, \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

où il ne reste à évaluer que l'expression $\partial(\lambda dx^\alpha/d\lambda)/\partial x^\alpha$. Pour cela on remarque d'abord que, si les $G_{\alpha\beta}$ sont constants, les géodésiques sont rectilignes et l'expression considérée est égale à 4, ce qui amène à écrire

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\lambda \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) = 4 + \lambda \frac{d}{d\lambda} (\log J) \quad (44)$$

J étant $\equiv 1$ lorsque les géodésiques sont rectilignes. Hadamard a donné de J une interprétation géométrique qui est particulièrement commode pour l'évaluation ultérieure de ϕ_0 , la voici. Fixons l'évènement \mathbf{P} et considérons tous les évènements \mathbf{M} situés dans un élément d'extension $d\tau_{\mathbf{M}}$; le long de chaque géodésique \mathbf{LM} de la famille, considérons l'évènement \mathbf{M}_ϵ correspondant à $\lambda_{\mathbf{M}_\epsilon} = \epsilon \lambda_{\mathbf{M}}$ ($\lambda_{\mathbf{P}} = 0$), ces derniers décrivent un élément d'extension $d\tau_{\mathbf{M}_\epsilon}$ et l'on a précisément

$$J(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\epsilon^4 \frac{d\tau_{\mathbf{M}}}{d\tau_{\mathbf{M}_\epsilon}} \right) \quad (45)$$

Il se vérifie sur cette formule que $J \equiv 1$ si les géodésiques sont rectilignes, et il se vérifie aussi que $J(\mathbf{P}; \mathbf{P}) = 1$, dans tous les cas. La formule (37) peut maintenant être explicitée en tirant avantage des relations

$$\Gamma \delta'(\Gamma) = -\delta(\Gamma), \quad \Gamma \delta(\Gamma) = 0 \quad (46)$$

qui suggèrent de poser

$$H = \phi_1 + \psi, \quad \psi = 0 \text{ quand } \Gamma = 0 \quad (47)$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} 2\pi G^{-1/2}(\mathbf{P})\mathcal{L}_{\mathbf{M}}[\varepsilon(\mathbf{P}; \mathbf{M})] &= 4\phi_0\{\Gamma\delta''(\Gamma) + 2\delta'(\Gamma)\} \\ &+ 2\left\{2\lambda \frac{d\phi_0}{d\lambda} + \lambda\phi_0 \left[\frac{d}{d\lambda} [\log(J\sqrt{G})] + \left(\left(\mathcal{U}, \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} \right) \right) \right] \right\} \delta'(\Gamma) \\ &+ 2\left\{2\lambda \frac{d\phi_1}{d\lambda} + \phi_1 \left[2 + \lambda \frac{d}{d\lambda} [\log(J\sqrt{G})] + \lambda \left(\left(\mathcal{U}, \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} \right) \right) \right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{M}}[\phi_0] \right\} \\ &\delta(\Gamma) + \{\mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\psi) + \mathcal{L}_{\mathbf{M}}(\phi_1)\} 1(\Gamma) \end{aligned} \quad (48)$$

Lorsque les $G_{\alpha\beta}$ sont constants et que ϑ est nul, la formule des potentiels retardés, combinée avec la formule précédente, montre que l'on a

$$4\{\Gamma\delta''(\Gamma) + 2\delta'(\Gamma)\} = 2\pi G^{-1/2}(\mathbf{P})\delta(\mathbf{M} - \mathbf{P}) \quad (49)$$

et la théorie de L. Schwartz permet précisément de montrer que ce résultat est conservé si les $G_{\alpha\beta}$ sont variables. Ce dernier point étant admis, il apparaît

que (33) est bien la solution élémentaire cherchée pourvu que soient vérifiées les conditions

$$\left. \begin{aligned}
 2 \frac{d\phi_0}{d\lambda} + \phi_0 \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\log (J\sqrt{G}) \right) + \left(\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} \right) \right) \right] &= 0, \\
 \phi_0(\mathbf{P}, \mathbf{P}) &= 1 \\
 2\lambda \frac{d\phi_1}{d\lambda} + \phi_1 \left\{ 2 + \lambda \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\log (J\sqrt{G}) \right) + \left(\left(\mathfrak{U}, \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} \right) \right) \right] \right\} & \\
 + \frac{1}{2} \mathfrak{L}_M (\phi_0) &= 0 \\
 \{ \mathfrak{L}_M(\psi) + \mathfrak{L}_M(\phi_1) \} 1(\Gamma) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Ainsi ϕ_0 est il déterminé, comme fonction de \mathbf{M} , par une équation différentielle ordinaire le long de chaque géodésique issue de \mathbf{P} , et aussi par une condition initiale en \mathbf{P} , soit

$$\begin{aligned}
 \phi_0(\mathbf{P}; \mathbf{M}) &= G^{1/4}(\mathbf{P})G^{-1/4}(\mathbf{M})J^{-1/2}(\mathbf{P}, \mathbf{M}) \\
 &\exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \left(\left(\mathfrak{U}(\mathbf{R}), d\mathbf{R} \right) \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (51)$$

\mathbf{R} étant un évènement intermédiaire sur la géodésique joignant \mathbf{P} à \mathbf{M} . La fonction ϕ_1 vérifie aussi une équation différentielle le long de chaque géodésique, mais l'on ne dispose pas de condition initiale; cela est sans inconvénient car l'équation différentielle en ϕ_1 possède une solution et une seule qui reste bornée quand \mathbf{M} tend vers \mathbf{P} , soit

$$\phi_1(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = - \frac{\phi_0(\mathbf{P}; \mathbf{M})}{4\lambda_{PM}} \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} \frac{\mathfrak{L}_R [\phi_0(\mathbf{P}; \mathbf{R})]}{\phi_0(\mathbf{P}; \mathbf{R})} d\lambda_{PR}. \quad (52)$$

Il reste à faire voir que la dernière condition (50) permet de déterminer ψ moyennant la condition que ψ s'annule en même temps que Γ . Pour cela on considère l'opérateur \mathfrak{L}^+ adjoint formel de \mathfrak{L} , soit

$$\mathfrak{L}^+ \equiv \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) & (4) \\ \nabla & \nabla \end{smallmatrix} \right) \right) - \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \mathfrak{U}, \nabla \end{smallmatrix} \right) \right) - \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) \\ \nabla, \mathfrak{U} \end{smallmatrix} \right) \right), \quad (53)$$

dont la solution élémentaire a la même forme que \mathfrak{E} , avec des ϕ_0^+ , ψ^+ , H^+ ; on utilise alors l'identité

$$B\mathfrak{L}(A) - A\mathfrak{L}^+(B) = \left(\left(\begin{smallmatrix} (4) & (4) & (4) \\ \nabla, B\nabla A - A\nabla B + AB\mathfrak{U} \end{smallmatrix} \right) \right), \quad (54)$$

que l'on applique de la manière suivante. Deux évènements fixes \mathbf{P} et \mathbf{M} sont choisis et l'évènement variable, dont les coordonnées interviennent dans les dérivations de (54), est noté \mathbf{R} ; on choisit

$$A_{\mathbf{P}}(\mathbf{R}) = \psi(\mathbf{P}; \mathbf{R}), \quad B_{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) = E^+(\mathbf{M}; \mathbf{R}), \quad (55)$$

où E^+ est déduit de la solution élémentaire E^+ en faisant formellement $\psi^+ = 0$; on convient aussi que A est nul à l'extérieur de l'onde émise par P et que B est nul à l'extérieur de l'onde rétrograde (c'est à dire celle qui se développe vers le passé temporel) émise par M . La formule (54), multipliée au préalable par $\sqrt{G(R)}$, est intégrée, au sens des distributions, dans tout l'espace temps. Le second membre ne donne aucune contribution alors que le premier membre conduit à

$$\psi(P, M) + \int_{\mathcal{D}(P, M)} K(R, M) \psi(P, R) \sqrt{G(R)} d\tau_R = F(P, M), \quad (56)$$

où le domaine quadridimensionnel $\mathcal{D}(P, M)$ est limité à la fois par l'onde émise en P et par l'onde rétrograde émise en M . Le noyau de l'intégrale est donné par

$$K(R, M) = \mathcal{L}_R^+ [\phi_1^+(M, R)], \quad (57)$$

alors que le second membre est donné par

$$F(P; M) = - E^+(M; R) \overset{*}{R} \mathcal{L}_R[\phi_1(P; R)]. \quad (58)$$

L'équation (56) est l'équation intégrale de M. Riesz⁴ pour la détermination de ψ . Il faut remarquer que, de par (58), F s'annule sur l'onde émise en P et que, par voie de conséquence, ψ s'annule aussi sur cette onde, en conformité avec (47); il faut remarquer aussi que l'équation (56) est du type héréditaire, tout comme l'équation de Volterra et peut donc être résolue grâce à un procédé itératif convergent. Consulter la figure 5.

REPRESENTATION DES PERTURBATIONS DANS LA ZONE DE BRUIT

Les théories du bruit d'origine balistique, en atmosphère non homogène, sont basées sur une description physique du phénomène dont la traduction mathématique exige que soit substituée à la formule (21) la formule simplifiée suivante

$$\bar{p}_{Br}(M) = (2\pi)^{-1} \rho_0(P) a_0^2(P) \mathfrak{J}(P) \overset{*}{P} \sqrt{G(P)} \phi_0(P; M) \delta[\Gamma(P; M)] \quad (59)$$

En d'autres termes l'émission sonore secondaire caractérisée par \square est négligée ainsi que l'influence du résidu associé à H dans la fonction d'influence. Nous

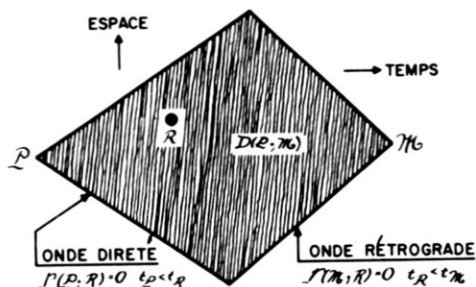


Fig. 5. Notations pour l'équation de M. Riesz.

savons ainsi de façon précise quelle est la nature des approximations impliquées dans la description physique du phénomène et nous avons un moyen de contrôler leur validité. Sur son expression même il apparaît que \square comprend des termes qui sont de l'ordre du carré des perturbations et des termes qui sont de l'ordre du produit des perturbations par les effets de non homogénéité de l'atmosphère calme. Si l'on admet que \bar{p}/p_0 est l'infiniment petit principal contrôlant l'intensité des perturbations, \square apparaît comme une collection de termes en $p_0 a_0^2 / L^2 / (\bar{p}/p_0)^2$ et une collection de termes en $g^2 a_0^{-4} p_0 a_0^2 \bar{p}/p_0$ où L est la longueur de l'avion; ces termes sont, au moins formellement, négligeables comme intervenant soit dans $\epsilon^2 \bar{p}_2$, formule (12), soit dans $\epsilon \bar{p}_1$, mais avec un coefficient de l'ordre de $g^2 L^2 a_0^{-4}$ qui est très petit. Une telle analyse formelle tend à justifier l'omission de l'émission secondaire \square mais elle n'est pas suffisante car, dans la zone de bruit, les perturbations s'accroissent et les termes qui sont formellement du second ordre ne restent pas en réalité de cet ordre; il est nécessaire de modifier l'analyse comme suit. La zone de bruit reste en onde avec elle-même au cours de son évolution, de sorte que, pour évaluer l'effet de \square sur $\bar{p}(\mathbf{M})$ dans la zone de bruit, il suffit de connaître \square dans cette zone tout le long de son histoire, depuis l'émission par l'avion; or, un examen de (4) compte tenu de la structure de la zone de bruit, conduit à

$$\square = \frac{\gamma + 1}{\gamma} a_0^2 \nabla \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right) \cdot \nabla \bar{p} + \square^*, \quad (60)$$

avec l'estimation suivante, valable dans la zone de bruit (τ est le vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde balistique):

$$\left| \square^* \right| = p_0 a_0^2 O \left\{ \left| \tau \cdot \nabla \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right) \right|^2 \left(\frac{|\bar{\mathbf{M}}|}{\lambda} + \frac{g|\bar{\mathbf{M}}|}{a_0^2} + \frac{|\bar{p}|}{p_0} \right) + \frac{g^2}{a_0^4} \frac{|\bar{p}|}{p_0} \right\}. \quad (61)$$

Le terme \square^* donne, dans (21), une contribution qui est au plus de l'ordre de $\bar{p}(g^2 L \lambda / a_0^4) + (L/\lambda)$ où λ est la distance parcourue par l'onde balistique depuis sa création et L est la longueur de l'avion; cette contribution de \square^* est donc négligeable pourvu que soit vérifiée la condition

$$\frac{g^2 L \lambda}{a_0^4} \sim \frac{L}{1 \text{ mètre}} \frac{\lambda}{10 \text{ kilomètres}} \ll 1 \quad (62)$$

en revanche, le premier terme de \square , dans (21), est amplifié par effet cumulatif. Il y a là une difficulté en apparence très sérieuse mais qui est fort heureusement, artificielle et qui se résout d'elle-même lorsque l'on passe à la considération du terme en Φ_0 , dans (21), auquel est associée une difficulté analogue dont l'effet compense exactement celui de la première. En fait, lorsque l'expression (51) de Φ_0 est développée formellement sous la forme

$$\Phi_0 = \Phi_0^{(Ac)} + \epsilon \Phi_0^{(1)} + \dots, \quad (63)$$

il apparaît que ϕ_0^1 ne reste pas borné dans la zone de bruit; pourtant, s'il est posé

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma} a_0^2 \nabla \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right) \cdot \nabla \bar{p} = \left(\left(\mathfrak{W}, \nabla \bar{p} \right)^{(4)} \right), \mathfrak{U}^* = \mathfrak{U} - \mathfrak{W} \quad (64)$$

en définition de \mathfrak{W} et de \mathfrak{U}^* , il est possible de récrire (10) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}^*(\bar{p}) &= \rho_0 a_0^2 \mathfrak{J} + \square^* \\ \mathfrak{L}^* &\equiv \left(\left(\nabla, \nabla \right)^{(4)} \right) + \left(\left(\mathfrak{U}^*, \nabla \right)^{(4)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

et l'analyse précédente peut être recommencée avec la nouvelle solution élémentaire

$$\mathfrak{E}^*(\mathbf{P}; \mathbf{M}) = \frac{\sqrt{G(\mathbf{P})} \{ \Phi_0^*(\mathbf{P}; \mathbf{M}) \delta[\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M})] + H^*(\mathbf{P}; \mathbf{M}) 1[\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M})] \}}{2\pi}, \quad (66)$$

Φ_0^* se déduisant de Φ_0 par remplacement de \mathfrak{U} par \mathfrak{U}^* dans la formule de définition (51). Cette fois, dans le développement

$$\Phi_0^* = \Phi_0^{-*(Ac)} + \epsilon \Phi_0^{*(1)} + \dots, \quad (67)$$

le terme $\Phi_0^{*(1)}$ reste borné dans la zone de bruit. Tel est le sens dans lequel on peut dire que les difficultés soulevées par Φ_0 et par \square se compensent exactement. Pour justifier la formule (59) il reste encore à prouver que le résidu associé à H peut être négligé. Il y a dans H deux catégories de termes, les uns proviennent de la non homogénéité de l'atmosphère, leur contribution est négligeable dans la zone de bruit sous réserve que soit vérifiée la condition (62); les autres contribuent formellement dans $\epsilon^2 \bar{p}_2$ mais la question reste ouverte de savoir si le coefficient du terme correspondant dans \bar{p}_2 reste borné. L'analyse à laquelle nous avons procédé n'est pas assez fine.*

EXPLICITATION DE L'APPROXIMATION PSEUDO ACOUSTIQUE

CALCUL DE LA PRESSION

Les vecteurs $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$, formant un repère orthonormal, soient, à l'instant t , $\mathbf{Q}(t)$ la position d'un point déterminé de l'axe du fuselage, par exemple le nez, $\mathbf{Q}(t) + \xi \mathbf{e}_1(t)$ celle d'un point courant de l'axe du fuselage, $\mathbf{Q}(t) + \xi \mathbf{e}_1(t) + \eta \mathbf{e}_2(t)$ celle d'un point arbitraire du plan de l'aile, et enfin $\mathbf{Q}(t) + \xi \mathbf{e}_1(t) + \eta \mathbf{e}_2(t) + \zeta \mathbf{e}_3(t)$ celle d'un point quelconque lié à l'avion; soient par

* Note ajoutée à la correction des épreuves cette difficulté se résout beaucoup plus simplement par appel à la technique des développements proximaux et distaux (inner and outer matched asymptotic expansions). Pour cette question voir [11]. On peut montrer également que, en acoustique, utiliser revient à utiliser l'acoustique géométrique; sur a point voir [11] chap 6.

ailleurs $S_F(\xi, t)$ la loi des aires des sections du fuselage, $h(\xi, \eta, t)$ la loi des épaisseurs de l'aile, $\rho_0 \bar{\omega}^{(F)}(\xi, t) \mathbf{e}_3(t)$ et $\rho_0 \bar{\omega}^{(A)}(\xi, \eta, t) \mathbf{e}_3(t)$ la loi des portances élémentaires du fuselage ou de l'aile; la théorie acoustique permet de montrer que la distribution \mathfrak{J} est donnée par

$$\mathfrak{J} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \mathfrak{J}_1 - \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathfrak{J}_2, \quad (68)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \left(\frac{\partial S_F}{\partial \tau} - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \frac{\partial S_F}{\partial \xi} \right) \delta_F + \left(\frac{\partial h}{\partial \tau} - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \delta_A, \\ \mathfrak{J}_2 &= -\bar{\omega}^{(F)} \delta_F - \bar{\omega}^{(A)} \delta_A, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

où δ_F et δ_A sont les masses de Dirac unité en ζ ou η , uniformément réparties sur l'axe du fuselage ou sur le plan de l'aile; \mathbf{V}_0 est naturellement le vecteur vitesse de vol.

Pour expliciter (59) il est évidemment indiqué de choisir ξ, η, ζ, τ comme variables indépendantes décrivant la localisation spatio-temporelle de l'évènement \mathbf{P} , mais alors il faut exprimer la masse de Dirac $\delta(\Gamma)$ dans ce nouveau système de coordonnées. On introduit la notation

$$\{(\Gamma(\mathbf{P}; \mathbf{M}))\}_{\zeta=0} = \Gamma(\xi, \eta, \tau; \mathbf{M}), \quad (70)$$

si \mathbf{P} est l'évènement dont la projection d'espace est $\mathbf{Q}(\tau) + \xi \mathbf{e}_1(\tau) + \eta \mathbf{e}_2(\tau) + \zeta \mathbf{e}_3(\tau)$, τ étant l'instant associé, et l'on convient que

$$\Gamma_\xi = \frac{\partial \Gamma(\xi, \eta, \tau; \mathbf{M})}{\partial \xi}, \quad \Gamma_\tau = \frac{\partial \Gamma(\xi, \eta, \tau; \mathbf{M})}{\partial \tau}, \quad \Gamma_{\tau\tau} = \frac{\partial^2 \Gamma(\xi, \eta, \tau; \mathbf{M})}{\partial \tau^2}. \quad (71)$$

La théorie des distributions portées par des variétés conduit à la relation

$$\delta(\Gamma) = \sum_i \frac{\delta(\tau - \tau_i^*)}{|\Gamma_{\tau_i^*}|}, \quad (72)$$

où les τ_i^* sont les racines de l'équation

$$\Gamma(\xi, \eta, \tau; \mathbf{M}) = 0. \quad (73)$$

Ainsi qu'il est connu, lorsqu'un émetteur sonore est en mouvement supersonique il se trouve généralement zéro ou deux fois en onde avec un évènement donné au cours de son évolution; dans le premier cas l'évènement \mathbf{M} est dans la zone de silence de l'émetteur sonore. Consulter la figure 6.

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour expliciter (59). On remarque que δ_F et δ_A ne dépendent pas de ξ, η ou τ , de sorte que l'on est conduit à poser

$$\sigma^{(F)} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 S_F \quad \sigma^{(A)} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 h, \quad (74)$$

et que (59) devient

$$\begin{aligned} \bar{p}(\mathbf{M}) = \iiint d\xi d\eta d\zeta \sum_i \left\{ \sigma^{(F)}(\xi, \tau_i^*) \delta(\eta) \delta(\zeta) + \sigma^{(A)}(\xi, \eta, \tau_i^*) \delta(\zeta) \right. \\ \left. + \bar{\omega}^{(F)}(\xi, \tau_i^*) \delta(\eta) \frac{\partial \delta(\zeta)}{\partial \zeta} + \bar{\omega}^{(A)}(\xi, \eta, \tau_i^*) \frac{\partial \delta(\zeta)}{\partial \zeta} \right\} \quad (75) \\ \frac{\rho_0(\tau_i^*) a_0^2(\tau_i^*) \sqrt{G(\tau_i^*)} \phi_0(\xi, \eta, \zeta, \tau_i^*; \mathbf{M})}{2\pi |\Gamma_{\tau_i^*}(\xi, \eta, \zeta, \tau_i^*; \mathbf{M})|} \end{aligned}$$

les intégrations devant être effectuées au sens des distributions.

Telle est, en toute généralité, la forme explicite de la relation (59) et il reste à examiner son comportement asymptotique au loin dans la zone de bruit. Cette dernière peut être caractérisée par la condition qu'il existe un τ_0 et un ξ_0 tels que

$$\Gamma(\xi_0, 0, \tau_0; \mathbf{M}) = \Gamma_{\tau_0}(\xi_0, 0, \tau_0; \mathbf{M}) = 0 \quad (76)$$

autrement dit, un évènement \mathbf{M} est dans la zone de bruit s'il est en onde stationnaire avec l'un des émetteurs sonores de l'axe du fuselage à un instant convenable. La recherche de tels évènements est immédiate puisque ce sont ceux qui sont situés sur les géodésiques de longueur nulle ($\Gamma = 0$) issues de $(\xi_0, 0, \tau_0)$ et dont la projection d'espace, ou rayon de propagation, fait en son point de départ l'angle $\text{Arccos}(1/M_0)$ avec l'axe du fuselage, ou plus précisément avec la direction de la vitesse du fluide. Il apparaît donc tout naturellement que la formule (75) est susceptible d'être mise sous la forme (11) dans la zone de bruit, mais nous voulons tirer avantage du fait que seules les grandes valeurs de λ sont considérées. Nous posons

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(\xi_0, 0, \tau_0; \mathbf{M})}{\partial \xi_0} &= \Gamma_{\xi_0}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0), \\ \frac{\partial^2 \Gamma(\xi_0, 0, \tau_0; \mathbf{M})}{\partial \tau_0^2} &= \Gamma_{\tau_0 \tau_0}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0), \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

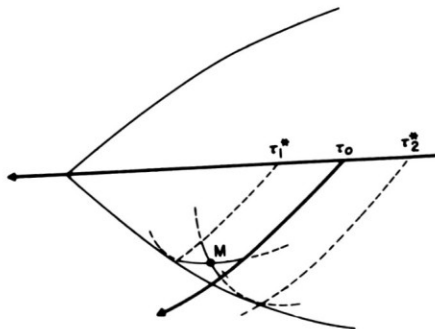


Fig. 6.

et un calcul simple conduit, pour les grandes valeurs de λ , aux évaluations asymptotiques suivantes:

$$\left. \begin{aligned} |\Gamma_{\tau_i^*}| &\cong \{2\Gamma_{\tau_0\tau_0}((\xi_0 - \xi)\Gamma_{\xi_0} - \eta\Gamma_{\eta_0})\}^{1/2}, \\ \tau_{1,2}^* &\cong \tau_0 \pm \sqrt{\frac{2(\xi_0 - \xi)\Gamma_{\xi_0} - \eta\Gamma_{\eta_0}}{\Gamma_{\tau_0\tau_0}}} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Entre les instants τ_1^* et τ_2^* l'avion se déplace et peut exécuter des manoeuvres, mais il sera supposé que les propriétés de l'atmosphère calme ne varient pas appréciablement au cours de ce déplacement (l'intervalle de temps en question, évalué en secondes est de l'ordre de $\sigma/10$ km, si σ est la distance parcourue par l'onde balistique depuis sa création et comptée le long du rayon de propagation); de toutes façons ce déplacement est très faible en comparaison de la distance qui sépare le point d'observation de la trajectoire de l'avion et l'on a

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_0 \phi_0^{(Ac)}}{2\pi a_0 |\Gamma_{\tau_i^*}|} \\ &\cong \frac{\rho_0(\tau_0)}{2\pi a_0(\tau_0)} \frac{\phi_0^{(Ac)}(\tau_0, \theta, \lambda)}{|2\Gamma_{\tau_0\tau_0}(\tau_0, \theta, \lambda)|^{1/2}} \frac{1}{|(\xi_0 - \xi)\Gamma_{\xi_0} - \eta\Gamma_{\eta_0}|^{1/2}} \end{aligned} \quad (79)$$

ou $a_0(\tau_0)$ et $\rho_0(\tau_0)$ sont respectivement la célérité du son et la densité de l'atmosphère au point où passe l'avion à l'instant τ_0 .

Lorsque (79) est substitué dans (75) il apparaît que l'intégration en η s'effectue avantageusement en premier lieu grâce à l'introduction de ξ^* et de $\Delta\tau$, définis comme suit ($(dt/d\lambda)_P$ désigne la valeur prise par $dt/d\lambda$, en suivant l'onde et en P):

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= \xi - M_0\{\eta\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\theta} + 2\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\theta}\}, \\ \Delta\tau(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0, \xi^*) &= 2 \sqrt{\frac{\lambda(\xi_0 - \xi^*)}{a_0 M_0 |\Gamma_{\tau_0\tau_0}|}} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)_P. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Dans ces formules $\boldsymbol{\theta}$ désigne le vecteur unitaire de la direction du rayon de propagation portant l'onde qui va en M, alors que λ désigne la valeur prise par λ_{PM} dans (41) lorsque P est en $(\xi_0, 0, 0, \tau_0)$, et, moyennant ces conventions de notations, la formule (79) s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_0 \Phi_0^{(Ac)}}{2\pi a_0 |\Gamma_{\tau_i^*}|} \\ &\cong \frac{\rho_0(\tau_0) M_0^{1/2}(\tau_0)}{4\pi a_0 \sqrt{\frac{\lambda}{a_0} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)_P}} \frac{\Phi_0^{(Ac)}(\tau_0, \theta, \lambda)}{\sqrt{|\Gamma_{\tau_0\tau_0}(\tau_0, \theta, \lambda)|}} \frac{1}{\sqrt{\xi_0 - \xi^*}} \end{aligned} \quad (81)$$

de sorte qu'il est tout indiqué de prendre ξ^* , η , z comme variables indépendantes. L'intégration en η , une fois effectuée, fait intervenir les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}^{(A)}(\tau_0, \theta, \lambda; \xi_0, \xi^*; z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{(A)} \\ \bar{\omega}_{\pm}^{(A)}(\tau_0, \theta, \lambda; \xi_0, \xi^*; z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\omega}^{(A)} \\ &\quad \left\{ \xi^* + M_0(\eta \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\theta} + z \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\theta}), \eta, \tau_0 \pm \Delta\tau \right\} d\eta, \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm}^{(F)}(\tau_0, \theta, \lambda; \xi_0, \xi^*; z) &= \sigma^{(F)} \\ \bar{\omega}_{\pm}^{(F)}(\tau_0, \theta, \lambda; \xi_0, \xi^*; z) &= \bar{\omega}^{(F)} \end{aligned} \left\{ \xi^* + M_0 z \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\theta}, \tau_0 \pm \Delta\tau \right\},$$

et la formule (75) devient

$$\begin{aligned} \bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) &= \frac{\rho_0(\tau_0) \Phi_0^{(Ac)}(\tau_0, \boldsymbol{\theta}, \lambda)}{4\pi a_0 \sqrt{\frac{\lambda}{a_0} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)_P}} \cdot \iiint \frac{d\xi^* d\eta dz}{\sqrt{\xi_0 - \xi^*}} \\ &\quad \left\{ (\sigma_+^{(F)} + \sigma_-^{(F)} + \sigma_+^{(A)} + \sigma_-^{(A)})(\tau_0, \theta, \lambda; \xi, \xi^*; z) \delta(z) \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\omega}_+^{(F)} + \bar{\omega}_-^{(F)} + \bar{\omega}_+^{(A)} + \bar{\omega}_-^{(A)})(\tau_0, \theta, \lambda; \xi_0, \xi^*; z) \frac{\partial \delta}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (83)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) = p_0(\tau_0, \theta, \lambda) P(\tau_0, \theta, \lambda) F(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0), \quad (84)$$

à condition de poser

$$\begin{aligned} P(\tau_0, \theta, \lambda) &= \frac{\rho_0(\tau_0) \Phi_0^{(Ac)}(\tau_0, \boldsymbol{\theta}, \lambda) V_0^2}{2\pi a_0(\tau_0) p_0(\tau_0, \theta, \lambda) \sqrt{\frac{\lambda}{a_0(\tau_0)} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)_P(\tau_0) |\Gamma_{\tau_0, \tau_0}|(\tau_0, \theta, \lambda)}}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} F(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0) &= \frac{1}{2V_0^2} \int_{-\infty}^{\xi_0} \frac{d\xi^*}{\sqrt{\xi_0 - \xi^*}} \left\{ \sigma_+^{(F)} + \sigma_-^{(F)} + \sigma_+^{(A)} + \sigma_-^{(A)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\omega}_+^{(F)} + \bar{\omega}_-^{(F)} + \bar{\omega}_+^{(A)} + \bar{\omega}_-^{(A)}) \right\}_{z=0}(\tau_0, \theta, \lambda, \lambda; \xi^*, \xi_0). \end{aligned} \quad (86)$$

La dépendance de F relativement à λ est liée à la dépendance de $\sigma_{\pm}^{(F)}$, $\sigma_{\pm}^{(A)}$, $\bar{\omega}_{\pm}^{(F)}$, $\bar{\omega}_{\pm}^{(A)}$, relativement au temps et elle disparaît en général dans le cas du vol rectiligne et uniforme; la fonction $P(\tau_0, \theta, \lambda)$ peut être explicitée grâce aux

formules que nous avons données pour ϕ_0 et Γ . Il faut remarquer que le procédé employé pour effectuer l'intégration en η revient à avoir transporté sur l'axe du fuselage tous les émetteurs sonores de l'avion; telle est la technique utilisée par W. D. Hayes^{6a} pour relier la résistance d'ondes d'un appareil volant à la structure du système d'ondes planes qu'il engendre à l'infini. Consulter la figure 7.

Pour donner aux formules finales la forme la plus suggestive possible il est préférable de substituer aux variables τ_0, θ, λ le couple de points $(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0)$ dont le premier est la position de l'avion à l'instant τ_0 , le second étant la projection d'espace de l'évènement $\mathbf{M}_0(\tau_0, \theta, \lambda, 0)$; en d'autres termes \mathbf{P}_0 et \mathbf{M}_0 peuvent être joints par un rayon de propagation de l'approximation acoustique, faisant avec la direction de vol en \mathbf{P}_0 l'angle $\text{Arccos}(1/M_0)$. Les formules (16) s'explicitent donc comme suit

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}^{(Ps-Ac)}(\mathbf{M}) &= p_0(\mathbf{M}_0)P(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0)F(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0) \quad , \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0) + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0) \quad . \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

La fonction $F(\tau_0, \theta, \lambda, \xi_0)$ s'interprète aisément grâce à la notion de fuselage de révolution équivalent; en effet, posons

$$\left. \left\{ \sigma_+^{(F)} + \sigma_-^{(F)} + \sigma_+^{(A)} + \sigma_-^{(A)} - \frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{\omega}_+^{(F)} + \bar{\omega}_-^{(F)} + \bar{\omega}_+^{(A)} + \bar{\omega}_-^{(A)}) \right\} \right\}_{\xi=0} \quad (88)$$

$$(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0, \xi^*) = 2V_0^2 \sigma^*(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0, \xi^*) = 2V_0^2 S_{\xi^* \xi^*}''(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0, \xi^*)$$

nous voyons que l'on a

$$F(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0) = \frac{1}{2n} \int_{-\infty}^{\xi_0} \frac{\sigma^*(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0, \xi^*)}{\sqrt{\xi_0 - \xi^*}} d\xi^* \quad (89)$$

de sorte que l'avion a, au point \mathbf{M}_0 , le même effet qu'un fuselage de révolution dont la loi des aires serait $S^*(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0, \xi^*)$. Ce fuselage de révolution équivalent

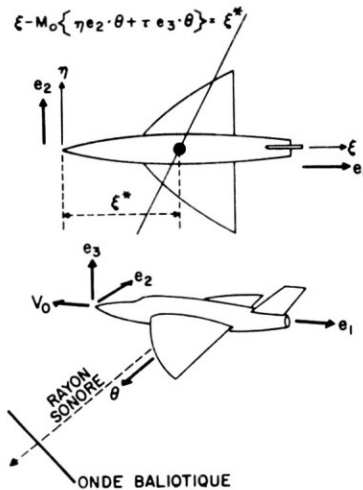


Fig. 7. Illustration du Théorème de Hayes.

change avec chaque rayon de propagation, mais il change aussi avec la position de \mathbf{M}_0 sur le rayon, à moins que le vol ne soit stationnaire. Nous avons donné en (74), (82), et (88) les formules permettant de déterminer le fuselage de révolution équivalent, mais il reste à préciser le délai $\Delta\tau$ qui entre dans les formules. Pour cela il est fait usage de (78), les dérivées étant évaluées sur l'expression de Γ en approximation acoustique, il vient ainsi

$$\Delta\tau = 2\mathbf{M}_0^{-1/2} \left\{ \frac{\xi_0 - \xi^*}{a_0(\mathbf{P}_0)} \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} \right\}^{1/2} |\Gamma_{\tau_0\tau_0}|^{1/2}, \quad (90)$$

et, pour $|\Gamma_{\tau_0\tau_0}|$, l'on trouve

$$|\Gamma_{\tau_0\tau_0}| = 2 \left\{ \frac{\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}_0}{a_0^2} - 1 - \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}}{a_0^2} + [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0] a_0^{-1} \frac{da_0}{dz} \right) a_0(\mathbf{P}_0) \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} \right\}. \quad (91)$$

Les notations sont les suivantes: \mathbf{V}_0 et $\boldsymbol{\gamma}_0$ sont respectivement le vecteur vitesse et le vecteur accélération de vol, \mathbf{k} est le vecteur unitaire vertical ascendant, $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur unitaire tangent en \mathbf{P}_0 au rayon de propagation dirigé vers \mathbf{M} , \mathbf{n} est le vecteur unitaire de la normale principale au rayon de propagation, dirigé vers la concavité, enfin le tenseur \mathbf{R} , qui se réduit au tenseur unité \mathbf{I} en atmosphère isotherme, est défini par

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{L(\mathbf{P}_0; \mathbf{M}_0)} a_0(\mathbf{P}_0) \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} - 1 \right) \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + \left(F(\mathbf{P}_0; \mathbf{M}) a_0(\mathbf{P}_0) \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} - 1 \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (92)$$

où $\mathbf{b} = \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{n}$ complète le repère de Serret-Frenet $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{n} , \mathbf{b} alors que $L(\mathbf{P}_0; \mathbf{M})$ est la distance qui sépare, en projection horizontale, les points \mathbf{P}_0 et \mathbf{M} , et que $F(\mathbf{P}_0; \mathbf{M})$ est l'angle de rotation du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ lorsque, \mathbf{P}_0 étant maintenu fixe, le point \mathbf{M} est déplacé d'une longueur unité dans la direction du vecteur \mathbf{n} ; il faut ajouter que l'atmosphère est supposée isotherme dans chaque plan horizontal. Consulter la figure 8.

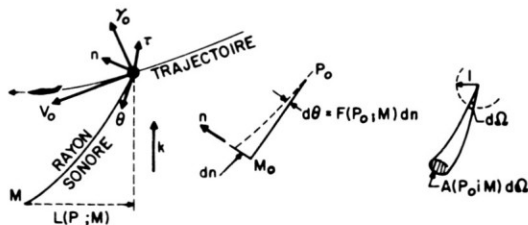


Fig. 8.

Nous pouvons maintenant expliciter (85) et pour cela nous commençons par considérer $\Phi_0^{(Ac)}$ qui est aisément obtenu, par application de la formule générale (51), sous la forme

$$\Phi_0^{(Ac)}(\mathbf{P}_0; \mathbf{M}) = \left(\frac{\rho_0(\mathbf{M})a_0(\mathbf{M})}{\rho_0(\mathbf{P}_0)a_0(\mathbf{P}_0)} \right)^{1/2} \frac{a_0(\mathbf{P}_0) \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)}}{A(\mathbf{P}_0; \mathbf{M})}, \quad (93)$$

où $A(\mathbf{P}_0, \mathbf{M})$ s'interprète aisément comme étant l'aire de la section droite en \mathbf{M} d'un pinceau de rayons de propagation formant en \mathbf{P}_0 un angle solide unité. On remarque qu'en atmosphère isotherme l'on a

$$\{\Phi_0^{(Ac)}(\mathbf{P}_0, \mathbf{M})\}_{\text{isotherme}} = \left(\frac{p_0(\mathbf{M})}{p_0(\mathbf{P}_0)} \right)^{1/2}, \quad (94)$$

et telle est l'origine de la règle employée par les ingénieurs

$$\left\{ \frac{\bar{p}_{\text{bruit}}(\mathbf{M})}{\sqrt{p_0(\mathbf{P}_0)p_0(\mathbf{M})}} \right\}_{\text{non homogène}} = \left\{ \frac{\bar{p}_{\text{bruit}}(\mathbf{M})}{p_0} \right\}_{\text{homogène}}, \quad (95)$$

laquelle, on le voit, ne retient qu'un aspect de l'effet de non homogénéité, à la vérité le plus important. Il peut être donné de l'expression (93) de $\Phi_0^{(Ac)}$ une interprétation suggestive. Imaginons qu'un ébranlement sonore localisé et instantané soit produit en \mathbf{P}_0 , et suivons son effet sur l'onde émise, l'amplitude de la perturbation varie, le long du rayon de propagation, proportionnellement à

$$\left(a_0(\mathbf{P}_0) \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} \right)^{-1} \Phi_0(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}) \sim (\rho_0 a_0)^{1/2} A^{-1}$$

Assimilons l'onde considérée à une onde plane, véhiculant une perturbation de pression $\bar{p} \sim (\rho_0 a_0)^{1/2} A^{-1}$, l'énergie acoustique de cette onde plane est $(\bar{p} a_0 / \gamma p_0)^2 \sim \gamma^{-2} \rho_0 a_0^3 p_0^{-2} A^{-1} = \rho_0^{-1} a_0^{-1} A^{-1}$ par unité de masse, de sorte que son flux à travers la section droite du pinceau de rayons considéré plus haut ne varie pas au cours de la propagation avec la vitesse a_0 . Après substitution de (93) dans (85) il vient

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}) \\ &= \frac{\mathbf{M}_0^{1/2}(\mathbf{P}) \rho_0(\mathbf{P}) V_0^2(\mathbf{P})}{\sqrt{p_0(\mathbf{P}) p_0(\mathbf{M})}} \left(\frac{a_0(\mathbf{P}_0)}{a_0(\mathbf{M})} \right)^{1/2} \frac{\left(a_0(\mathbf{P}_0) \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}} \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)} \right)^{1/2}}{A(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}) | \Gamma_{\tau_0 \tau_0} |^{1/2}}, \end{aligned} \quad (96)$$

ce qui, avec (89) achève d'explicitier (87a). On notera que F est homogène à (Longueur)^{1/2} alors que P est homogène à (Longueur)^{-1/2}; enfin il ne faudra pas confondre le vecteur accélération γ_0 avec le rapport des chaleurs spécifiques γ .

DEFORMATION DES RAYONS DE PROPAGATIONS.

L'étude n'est simple que si l'on peut faire l'hypothèse d'ondes planes, c'est à dire si la surface définie par l'élimination de τ_0 entre $\Gamma = 0$ et $\Gamma_{\tau_0} = 0$, à ξ_0 fixé, peut être considérée comme plane, le gradient de pression dans le plan tangent étant beaucoup plus faible que dans la direction normale. La planéité est requise sur une distance qui est de l'ordre de la distance entre les projections d'espace des évènements \mathbf{M}_0 et $\mathbf{M}_0 + \bar{\mathbf{M}}$. Une telle hypothèse d'ondes planes est valable pourvu que soient vérifiées les deux conditions

$$|\Gamma_{\tau_0 \tau_0}| \neq 0 \quad (97)$$

$$V_0^{-1} \left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau_0} \right| \ll \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi_0} \quad (98)$$

Lorsque la première d'entre elles n'est pas vérifiée, la représentation obtenue précédemment pour \bar{p} est elle-même en défaut, l'approximation (78) n'étant pas valable; quand à la seconde de ces conditions elle sera en général vérifiée dans le cas d'un vol quasi-stationnaire, mais elle peut être en défaut si l'avion effectue des manoeuvres rapides; nous ne chercherons pas à discuter en toute généralité sa validité. Il faut remarquer que l'hypothèse d'ondes planes a été utilisée pour obtenir les estimations (60) et (64) et nous ne savons pas si les conclusions données au-dessus restent valables lorsque l'on renonce à cette hypothèse. De nouveaux efforts sont nécessaires pour élargir le champ d'application de la théorie. En particulier, il serait très intéressant de parvenir à s'affranchir de la condition (97) pour traiter le phénomène du bruit renforcé ou "superbang."* Ici nous adopterons l'hypothèse d'ondes planes sans plus de critique.

Compte tenu de (28) les équations (39) s'explicitent sous la forme (\mathbf{q} est un vecteur qui s'introduit dans le calcul):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= a |\mathbf{q}|, \\ \frac{d\mathbf{M}}{d\lambda} &= a |\mathbf{q}| \mathbf{U} + a^2 \mathbf{q}, \\ \frac{d\mathbf{q}}{d\lambda} &= -a |\mathbf{q}| (\nabla \mathbf{U}) \cdot \mathbf{q} - a |\mathbf{q}|^2 \nabla a, \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

pour les géodésiques situées sur une onde $\Gamma = 0$. Une analyse des équations (5), compte tenu de la structure de la zone de bruit, permet de montrer que les perturbations peuvent y être supposées isentropiques et que le vecteur vitesse y est convenablement représenté par la formule

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}}{p_0} a_{0\sigma}, \quad (100)$$

* Note Ajoutée à la correction des épreuves. La solution de ce problème a été obtenue récemment par l'auteur, en deux parties, dont la première est publiée.¹⁴

où τ est le vecteur unitaire tangent au rayon de propagation. Le caractère isentropique a évidemment pour conséquence la relation

$$\frac{\bar{a}}{a_0} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}}{p_0} \quad (101)$$

Des équations (99) il est possible de déduire l'équation suivante régissant l'évolution du produit $a_0 |\mu| \{1 + (\gamma H |2\gamma) \bar{p} | p_0\}$ le long du rayon de propagation:

$$\frac{d|\mathbf{q}|}{d\lambda} = -a q^2 \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \left\{ a_0 \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}}{p_0} \right) \right\}, \quad (102)$$

Cette équation ne permet pas de conclure à la constance du produit en question, ce qui complique l'analyse du passage de l'approximation acoustique à l'approximation pseudo-acoustique. Il faut introduire un paramètre artificiel $\bar{\lambda}$ tel que

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} = a_0 |\mathbf{q}| \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}}{p_0} \right), \quad (103)$$

et l'on peut montrer que l'analyse précédente est valable si $\bar{\lambda}$ est partout substitué à λ . Effectivement, par passage d'une approximation à l'autre, $\bar{\lambda}$ est très peu modifié en valeur relative, alors que λ l'est considérablement, mais on montre que

$$\frac{\Phi_0^*}{\Phi_0^{*(Ac)}} \cong \frac{\lambda^2}{\bar{\lambda}^2}, \quad \frac{\Gamma \xi_0 \Gamma_{\tau_0 \tau_0}}{(\Gamma \xi_0 \Gamma_{\tau_0 \tau_0})^{Ac}} \cong \frac{\lambda^4}{\bar{\lambda}^4}, \quad (104)$$

de sorte que l'erreur relative commise sur le rapport $\Phi_0 / |\Gamma \xi_0 \Gamma_{\tau_0 \tau_0}|^{1/2}$, et par suite sur \bar{p} , reste très faible lorsque l'on passe de l'approximation acoustique à l'approximation pseudo-acoustique; ce point complète les remarques précédemment formulées à propos des difficultés liées à Φ_0 et à \square . Soit maintenant σ l'arc parcouru le long du rayon, de propagation et convenons de supprimer désormais la barre sur λ , les équations (99) se mettent sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}}{p_0}, & \frac{d\sigma}{d\lambda} &= 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}}{p_0}, & \frac{d^2 \mathbf{M}}{d\sigma^2} &= -a_0^{-1} \nabla_n a_0 \\ & & & & & - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \nabla_n \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

$$\nabla_n \equiv \nabla - \tau \tau \cdot \nabla$$

en d'autres termes, si \mathbf{M} et τ_M sont les composantes spatiale et temporelle de \mathbf{M} l'on a

$$\left. \begin{aligned} t_M &= \tau_0 + \int_0^\lambda \left\{ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda_1, \xi_0)}{p_0(\tau_0, \theta, \lambda_1)} \right\} d\lambda_1 \\ \sigma_M &= |\mathbf{P}_0 \mathbf{M}| = \int_0^\lambda a_0(\tau_0, \theta, \lambda_1) \\ & & & \left\{ \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda_1, \xi_0)}{p_0(\tau_0, \theta, \lambda_1)} \right\} d\lambda_1, \right. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

σ_M étant la longueur du rayon de propagation perturbé allant de \mathbf{P}_0 en \mathbf{M} ; naturellement, pour l'évènement correspondant de l'approximation acoustique, l'on a

$$\left. \begin{aligned} t_{\mathbf{M}_0} &= \tau_0 + \lambda, \\ \sigma_{\mathbf{M}_0} &= |\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0| = \int_0^\lambda a_0(\tau_0, \theta, \lambda_1) d\lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Soit $\mathbf{E} = \mathbf{M}_0 \mathbf{M}$ le vecteur écart entre les points \mathbf{M}_0 et \mathbf{M} , la dernière équation (102) conduit à

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{d\sigma^2} = -\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \nabla_n \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right), \quad (108)$$

cela montre que le rayon de propagation de l'approximation acoustique et le rayon de propagation perturbé ont, en des points correspondants, des directions très voisines comme cela résulte de l'estimation

$$\left| \nabla_n \left(\frac{\bar{p}}{p_0} \right) \right| = 0 \left(\frac{1}{\sigma} \left| \frac{\bar{p}}{p_0} \right| \right), \quad (109)$$

qui est valable dans la même mesure que l'hypothèse d'ondes planes; de manière analogue $\sigma^{-1} |\mathbf{E}|$ reste très petit, mais $|\mathbf{E}|$ lui-même peut être grand, par exemple en comparaison de la longueur de l'avion. Pour connaître (87b) il faudrait en principe connaître \mathbf{E} , ce qui semble assez difficile à atteindre; heureusement, l'hypothèse d'ondes planes, lorsqu'elle est valable, permet de simplifier la description; d'ailleurs, si l'on renonce à l'hypothèse d'ondes planes, il faut aussi renoncer aux formules (105).

Le contenu de l'approximation d'ondes planes revient à substituer à l'évènement $\mathbf{M}_0(\lambda) + \bar{\mathbf{M}}(\lambda)$ celui dont la projection d'espace est située sur le même rayon de propagation que la projection d'espace de $\mathbf{M}_0(\lambda)$, à une distance de l'origine de ce rayon égale à σ_M , et dont la composante temporelle est t_M , selon (106). En définitive, au lieu de considérer une famille à trois paramètres τ_0, θ, ξ_0 de rayons de propagations, on se borne à considérer une famille à deux paramètres seulement, correspondant à $\xi_0 = 0$, mais alors, il faut remplacer les formules (106) par

$$\left. \begin{aligned} t_M &= \tau_0 + \int_0^\lambda \left\{ 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda_1, \xi_0)}{p_0(\tau_0, \theta, \lambda_1)} \right\} d\lambda_1, \\ \sigma_M &= \xi_0 \theta \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{e}_1(\tau_0) + \int_0^\lambda a_0(\tau_0, \theta, \lambda_1) \\ &\quad \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}(\tau_0, \theta, \lambda_1, \xi_0)}{p_0(\tau_0, \theta, \lambda_1)} \right\} d\lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

La figure 9 explique cette construction géométrique et il apparaît que cela revient à supposer que l'écoulement est équivalent, le long de chaque rayon de propagation, à un écoulement monodimensionnel non stationnaire dans un tube de section variable.

Une ultime modification de notations consiste à utiliser la variable

$$\omega = -\xi_0 \theta \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{e}_1(\tau_0) \quad , \quad (111)$$

à la place de ξ_0 , et à poser

$$F(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \xi_0) = G(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \omega) \quad , \quad (112)$$

pour obtenir les formules de travail suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}^{(P_s - \cdot A_c)}(\mathbf{M}) &= p_0(\mathbf{M})_0 P(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0) G(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0, \omega) \quad , \\ \sigma_{\mathbf{M}} &= |\mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0| \\ &- \omega + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}_0} P(\mathbf{P}_0, \mathbf{R}) G(\mathbf{P}_0, \mathbf{R}, \omega) d\sigma_{\mathbf{R}} \quad , \\ t_{\mathbf{M}} &= \tau_0 + T(\mathbf{P}_0, \mathbf{M}_0) \\ &- \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbf{P}_0}^{\mathbf{M}_0} \frac{P(\mathbf{P}_0, \mathbf{R}) G(\mathbf{P}_0, \mathbf{R}, \omega)}{a_0(\mathbf{R})} d\sigma_{\mathbf{R}} \quad . \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

CONCLUSION

Nous avons présenté une théorie du bruit balistique créé par le vol des avions supersoniques, qui tient compte d'une manière aussi rationnelle que possible des effets de non homogénéité de l'atmosphère. Cette théorie est en parfaite conformité avec les vues exposées par Whitham,^{10c} en toute généralité, à partir

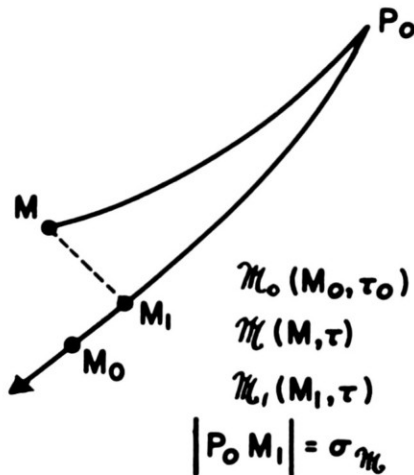


Fig. 9.

d'une description physique du phénomène. Selon cet auteur l'onde en N qui crée le phénomène de bruit évolue, le long de chaque rayon de propagation de l'atmosphère calme, comme si elle s'écoulait, à la manière d'un système d'ondes planes, dans un tube de section variable. Toujours selon Whitham, la section droite du tube peut être calculée tout le long du rayon de propagation si l'on dispose d'une solution acoustique du problème, c'est à dire d'une solution linéaire. D'ailleurs il suffit de connaître cette solution acoustique dans une sorte d'approximation d'acoustique géométrique, ce qui permet de calculer l'intensité de la perturbation de pression en écrivant que le flux d'énergie acoustique se conserve le long du tube acoustique fictif. Nous avons montré comment un procédé systématique permet de justifier ce schéma. Il a été établi que la perturbation de pression satisfait à une relation aux dérivées partielles qui se réduit à la classique équation des ondes avec célérité de son constante en approximation linéaire et en atmosphère homogène. Dans le cas général cette équation est linéaire relativement aux dérivées secondes, dont seules celles de la pression interviennent, et ses caractéristiques coïncident avec celles des équations du mouvement. On peut donc dire que l'équation en question traduit le phénomène de propagation des perturbations de pression dans tous ses détails; naturellement elle est insuffisante à elle seule pour décrire le phénomène exactement car il y figure la vecteur vitesse du fluide et son entropie, pour la détermination desquel il faut faire appel à des équations supplémentaires. Pour surmonter la difficulté nous considérons l'équation de propagation de la pression comme une équation linéaire de type hyperbolique, dont les coefficients sont variables et dépendent de la solution; d'ailleurs la variabilité des coefficients tient à deux causes: il y a d'abord la non homogénéité de l'atmosphère et ensuite les effets de non linéarité. Grâce aux techniques récemment développées par les mathématiciens pour traiter les équations linéaires hyperboliques à coefficients variables, il est possible de représenter la solution formellement à l'aide d'un algorithme qui amène tout naturellement à choisir comme variables indépendantes celles qui décrivent la propagation des ondes dans le tube acoustique fictif précédent, mais, naturellement, la forme précise de ce tube acoustique dépend de la solution en raison de la non linéarité. Parvenu à ce stade on met en oeuvre le procédé usuel de développement en puissances d'un petit paramètre, qui conduit à la solution acoustique. Mais ici, les variables indépendantes ne sont pas les variables d'espace et le temps, de sorte que ces dernières sont développées en même temps que le reste de la solution. Ainsi procède Lighthill pour rendre uniformément valable une approximation qui ne l'est pas: dans le cas actuel c'est l'approximation acoustique qui n'est pas valable, du moins lorsqu'elle est exprimée à la manière usuelle en termes de coordonnées d'espace et de temps, pour la rendre valable il faut l'exprimer à l'aide des nouvelles variables et retenir deux termes dans le développement de chaque coordonnée d'espace et dans celui du temps; le premier terme est évidemment celui qui décrit la géométrie de la propagation des ondes en approximation acoustique, le second terme étant un effet de déformation du aux perturbations, et qui peut être calculé à l'aide du premier terme dans le développement de la pression. Retenant ainsi un seul terme dans le développement de la pression et deux termes dans le développement des variables spatio-

temporelles, l'on obtient une solution acoustique modifiée ou solution pseudo-acoustique dont on peut montrer, par une analyse des termes négligés, qu'elle est uniformément valable dans la zone de bruit, à l'exception de certaines zones de bruit renforcé dont le traitement nécessite de nouveaux efforts. Chemin faisant toutes les approximations nécessaires dans le schéma physique s'introduisent naturellement et sont justifiées; ainsi, l'approximation qui consiste à décrire les ondes planes constituant l'onde en N à l'aide d'une acoustique géométrique revient, mathématiquement, à négliger dans la perturbation produite par une impulsion localisée et instantanée, tout le résidu qui voyage en retrait du front d'onde; la validité de cette approximation peut être étudiée en examinant l'effet du résidu négligé; seules des difficultés techniques ont empêché de fournir la preuve complète que tous les termes négligés dans ce résidu sont effectivement négligeables, mais le résultat ne fait pas de doute. En ce qui concerne la source du bruit, elle est représentée en toute généralité par la loi des aires du fuselage, la loi des épaisseurs de l'aile et la loi de portance des deux parties; le mouvement de l'avion peut être le plus général imaginable, au moins tant que l'on reste au stade de l'approximation pseudo-acoustique formelle. Pour expliciter les formules exprimant les coordonnées spatio-temporelles il faut faire usage de l'approximation d'ondes planes, faute de quoi il paraît difficile d'aboutir à des formules explicites. Cela exclut la considération d'avions effectuant des manoeuvres trop rapides, mais il est probable que celles-ci conduisent à des ondelettes absorbées dans les chocs assez tôt au cours du phénomène de propagation; cela exclut aussi, du moins pour l'instant, la considération du phénomène de "superbang,"¹⁴ si intéressant soit-il du point de vue pratique. Toute cette partie du travail, qui consiste à exploiter la solution pseudo-acoustique formelle pour construire l'onde en N , est désormais très classique, et se trouve exposée dans les références 11, 12, 13.

REFERENCES

1. Friedrichs, K. O., "Formation and Decay of Shock Waves," *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 1, 1948, p. 211.
2. Guiraud, J. P., (a) "Sur le bruit provoqué au sol par les avions supersoniques," *Comptes rendus*, vol. 253, 1961, pp. 67-69; (b) "Ondes sonores non linéaires produites par le vol d'un avion en atmosphère non homogène sans vent," *Comptes rendus*, vol. 253, 1961, pp. 375-376.
3. Hadamard, J., "Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques," Paris, Hermann, 1932.
4. Riesz, M., "L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes," *Acta Mathematica*, 81.
5. Schwartz, L., *Théorie des Distributions*, vols. 1 and 2, Paris, Hermann, 1950-1951.
6. Hayes, W. D., (a) "Linearized Supersonic Flow," thesis, California Institute of Technology, 1947, *Tech. Rept. N. Amer. Aviation Inc.*, no. AL-222; (b) "Pseudo-transonic Similitude and First-order Wave Structure," *J. Aeron. Sci.*, November 1954.
7. Lighthill, M. J., (a) "A Technique for Rendering Approximate Solutions to Physical Problems Uniformly Valid," *Phil. Mag.*, 40, 1949, p. 1179; (b) "The Energy Distribution Behind Decaying Shocks: I, Plane Waves," *Phil. Mag.*, 41, 1950, p. 1101.
8. Rao, P. S., "Supersonic Bangs: Parts 1 and 2," *Aero. Quart.*, 7, February and May 1956, pp. 21-44, 135-155.